TD8 : clôtures de tout poils

1 Parcours en largeur

Dans un graphe, on notera un chemin reliant le sommet u au sommet v par $u \to v$. La longueur d'un tel chemin (nombre d'arêtes du chemin ou somme des longueurs des arêtes du chemin s'il y a des longueurs) sera noté $|u \to v|$. La distance entre 2 sommets u et v est $dist(u,v) = min\{|u \to v|\}$.

On considère les graphes suivants :

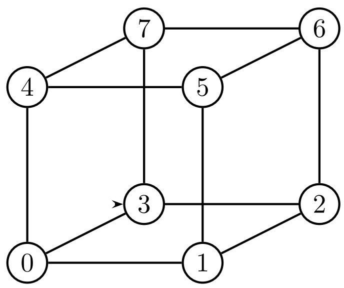

Fig. 1 – Graphe $\mathcal{G}_1$

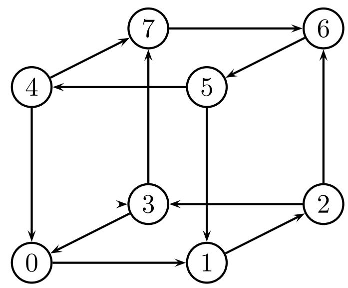

Fig. 2 – Graphe $\mathcal{G}_2$

Sur $\mathcal{G}_1$, en prenant le nœud 3 comme nœud de départ :

1. quelles sont les distances entre les nœuds de $\mathcal{G}_1$ et le nœud 3.

Sur $\mathcal{G}_2$, toujours en prenant le nœud 3 comme nœud de départ :

2. quelles sont les nœuds de $\mathcal{G}_2$ à distance 1 du nœud 3 (attention aux orientations : on n'a pas le droit de prendre une arête en sens inverse) ? à distance 2 ? à distance 3 ? à distance 4 ? En déduire un algorithme simple pour calculer les distances de chaque nœud de $\mathcal{G}_2$ à un nœud donné.

3. quel est le diamètre de $\mathcal{G}_2$ (plus grande distance entre 2 nœuds) ?

4. quels sont les nœuds pouvant être reliés à 3 par un chemin de longueur 5 ?

2 Composantes connexes

Soit $\mathcal{G}_3$ le graphe suivant (les nœuds sont numérotés en hexadécimal de 0 à F) :

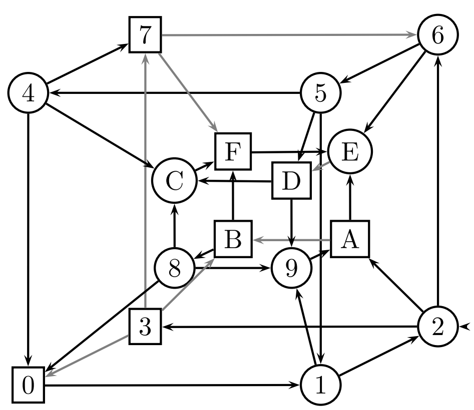

Fig. 3 – Graphe $\mathcal{G}_3$

On considère que le nœud 2 est le nœud de départ.

5. si on s'interdit de traverser un nœud carré, quels sont les nœuds ronds accessibles à partir de 0 ? à partir de 2 ?

6. si on s'interdit de traverser les arêtes grisées, quels sont les nœuds ronds accessibles à partir de 2 ?

7. calculer les ensembles fortement connexes de nœuds ronds (les ensembles dans lesquels tous les sommets sont accessibles des uns aux autres).

3 Clôture transitive

Soit $\mathcal{G}_4$ le treillis (le graphe) suivant :

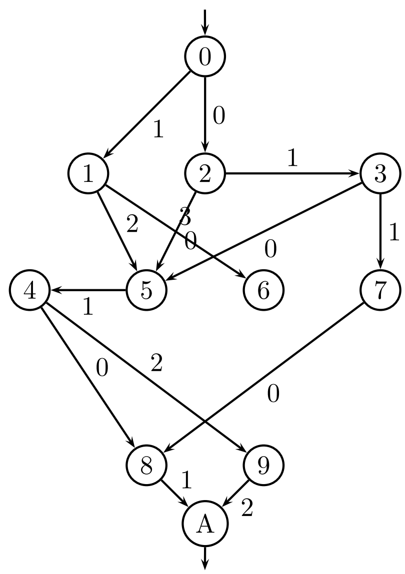

Fig. 4 – Graphe $\mathcal{G}_4$

7. Calculer les distances des nœuds au nœud de départ 0. Comment modifier l'algorithme du **2.** pour qu'il calcule ces distances ?

8. Eliminez toutes les arêtes de longueur nulles : pour chaque nœud ayant des arêtes sortantes de longueur 0, cherchez les nœuds les plus proches à distance ≥ 1, et mettez une ajoutez de longueur appropriée. Dans quel sens y a-t-il le moins de calcul à faire : en traitant les nœuds du haut vers le bas ou l'inverse ?

4 Clôtures transitives d'automates

On va utiliser l'automate de Thompson pour pour l'expression régulière $a^*.b.(a+c).b.(b+c)^*$.

9. Construire cet automate $\mathcal{A}_1$.

Les ϵ-transitions sont les analogues des arêtes de longueur 0 dans le treillis précédent, les transitions normales (avec une lettre) seraient des arêtes de longueur 1 pour un treillis. On cherche à éliminer les ϵ-transitions.

10. Pour chaque état i, calculer les états à distance 0 de l'état i, et ceux à distance 1.

11. Construire l'automate $\mathcal{A}_12$ sans les ϵ-transitions.

Soit ω le mot *aaabcbbca* .

12. Dans l'automate $\mathcal{A}_2$, calculer les ensembles d'états E_i où dans lesquels on peut se retrouver après avoir lu i lettres de ω. A quelle condition sur $E_{|\omega|}$ le mot ω est-il accepté ? Donner un algorithme pour tester si un mot donné est reconnu par un automate (non-déterministe).

13. Que modifier dans l'algorithme précédent pour qu'il puisse fonctionner sur des automates avec des ϵ-transitions ?