

Algorithmique : TD 7

Licence M/I - 8 novembre 2004

Un parking a la configuration ci-dessous :



La méthode (I) pour garer une voiture est la suivante : chaque voiture arrive avec une place p qu'elle désire occuper. Si celle-ci n'est pas libre, elle se place dans la première place libre supérieure à p . Si elle ne trouve pas une telle place, elle sort et a échoué à se garer.

On considère n voitures $(1, 2, \dots, n)$ qui désirent se garer dans cet ordre, la voiture i visant la place p_i . Si les n voitures parviennent à se garer avec la méthode (I), la suite $(p_i)_{i \in [1;n]}$ est appelée **suite de parking**.

Exercice 1: La suite $(2, 3, 1, 3, 2)$ est-elle une suite de parking? Quel est le résultat?

Exercice 2: Donner une autre suite de parking aboutissant au même résultat.

Exercice 3: Donner toutes les suites de parking pour 2 voitures, 3 voitures.

Exercice 4: Montrer que $(p_i)_{i \in [1;n]}$ est une suite de parking si et seulement si

$$\forall k \in [1; n], \text{Card}\{p_i \mid p_i \leq k\} \geq k.$$

La méthode (II) pour garer une voiture est la suivante : lorsqu'une voiture décide de se garer en p , si la place est occupée, la voiture qui se trouve dessus est poussée sur la place $p + 1$. Si celle-ci n'était pas libre, son occupante est poussée sur la place $p + 2$ et ainsi de suite. S'il faut pousser la voiture qui se trouve en n , il y a échec.

Exercice 5: Dessiner la configuration obtenue avec la suite $(2, 3, 1, 3, 2)$, puis avec la suite donnée en 2.

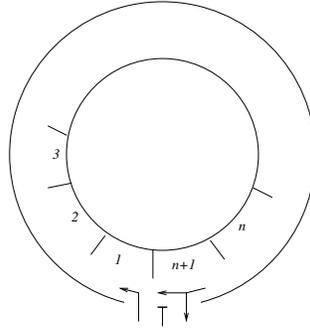
Exercice 6: Montrer que la méthode (II) permet de garer n voitures $(1, 2, \dots, n)$ si et seulement si la suite $(p_i)_{i \in [1;n]}$ correspondante est une suite de parking.

Exercice 7: On se donne les deux permutations 13245 et 14532, donner deux suites de parking dont le remplissage par les méthodes (I) et (II) donne ces deux permutations. Même question pour 31254 et 52134.

Question subsidiaire à faire à la fin : Pour une suite de parking $(p_i)_{i \in [1;n]}$ donnée, on note $(u_i)_{i \in [1;n]}$ et $(v_i)_{i \in [1;n]}$ les suites (qui sont des permutations) obtenues respectivement avec les méthodes (I) et (II). Donner une idée d'un algorithme pour construire p_i à partir de u_i et v_i .

On considère maintenant un parking un peu différent. A la sortie du parking, il y a une place supplémentaire (soit, en tout, $n + 1$ places). De plus, la méthode (I) est modifiée de la façon suivante :

si une voiture n'a pas réussi à se garer (y compris dans cette dernière place), la voiture rentre à nouveau dans le parking et prend la première place disponible. La place visée par une voiture peut à présent être un nombre entre 1 et $n + 1$.



Evidemment, avec cette méthode, les voitures arrivent toujours à se garer (il y a même une place vide à la fin).

Exercice 8: Comment voit-on, à la fin de l'opération, si la suite $(p_i)_{i \in [1;n]}$ était une suite de parking?

Exercice 9: Soit une suite qui laisse la place j libre, construire une suite qui laisse la place $j + 1$ libre.

Exercice 10: En déduire le nombre de suites de parking à n places.